Seat No. : ____________

FB-02

Mathematics Paper-II
(New Course)

Time : 3 Hours] **[Total Marks: 105**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **સાત** પ્રશ્નો છે.
(2) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.
(3) દરેક પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (a) સહઅવયવજ (Adjoint) શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. જો $A = [a_{ij}]_n$ એ n-કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = |A|\,I_n$.

અથવા

(a) શ્રેણિકના પરિવર્ત (Transpose) શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.
જો A એ $m \times n$ પ્રકારનો શ્રેણિક અને B એ $n \times p$ પ્રકારનો શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે
$(AB)^T = B^T A^T$.

(b) શ્રેણિકના કોટિની વ્યાખ્યા આપો.
શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો.

(c) ગમે તે **એક** ગણો :
(1) સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.
શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળારૂપે રજૂ કરો.

(2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} શોધો.

2. (a) ચોરસ શ્રેણિક માટે લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશની વ્યાખ્યા આપો.
શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશ શોધો.

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ શોધો અને

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ વડે નિરૂપણ પામતો શ્રેણિક શોધો.

(c) સમીકરણ સંહતિ $5x + 3y + 7z = 4$

$3x + 26y + 2z = 9$

$7x + 2y + 11z = 5$ નો ક્રેમરનાં નિયમનો ઉપયોગ કરી ઉકેલ મેળવો.

અથવા

2. (a) કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) સુરેખ સમીકરણ સંહતિ

$x + y + z = 3$

$x + 2y + 3z = 4$

$x + 4y + 9z = 6$ ની સુસંગતતા ચકાસો અને હાર સંક્ષિપ્ત સોપાનની રીતે તેનો ઉકેલ મેળવો.

(c) કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શોધો.

3. (a) દ્વિવર્ગ સમીકરણ

$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$

$a, b, c, d, e \in R,\ a \neq 0$ ને ઉકેલવાની ફેરારીની રીત સમજાવો.

અથવા

(a) ત્રિઘાત સમીકરણ

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$

$a, b, c, d \in R,\ a \neq 0$ ને ઉકેલવા માટેની કાર્ડનની રીત સમજાવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) ફેરારીની રીતે $x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 104x + 96 = 0$ ઉકેલો.

(2) કાર્ડનની રીતે સમીકરણ $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$ ઉકેલો.

(3) જો α, β, γ એ સમીકરણ $x^3 - 12x + 16 = 0$ ના બીજ હોય તો નીચેના બીજવાળા સમીકરણો મેળવો.

(i) $(\alpha - \beta)^2,\ (\beta - \gamma)^2,\ (\gamma - \alpha)^2$ અને

(ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha),\ \gamma(\alpha + \beta)$.

4. (a) પ્રચલિત સંકેતો મુજબ R^2 માં શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ મેળવો.

અથવા

(a) a ત્રિજ્યાવાળા અને (δ, α) કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. જો વર્તુળ ધ્રુવમાંથી પસાર થાય તો વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) જો શાંકવની પરસ્પર લંબ નાભિજીવાઓ $P'SP$ અને $Q'SQ$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'}$ = અચળ છે.

(2) સમીકરણ $r = a \cos \theta + b \sin \theta$, a, b શૂન્યેત્તર અચલ, એ વર્તુળનું નિરૂપણ કરે છે તેમ બતાવો તેમજ તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

(3) જો R^3 માં કોઈ બિંદુના સિલિન્ડરીય યામ $(4, \frac{\pi}{4}, 4)$ હોય તો તેનાં કાર્તેઝીય અને ગોલીય યામ મેળવો.

5. (a) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરનાં બિંદુ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) સાબિત કરો કે R^3 માં સમતલ અને ગોલકનો સામાન્ય છેદ એક વર્તુળ છે.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) 'a' ની કઈ કિંમત માટે સમતલ $x + y + z = a$,
ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$ ને સ્પર્શે ? કયા બિંદુઓ સ્પર્શબિંદુઓ થાય ?

(2) સાબિત કરો કે ગોલકો

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0 \text{ અને}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$$ બહારથી સ્પર્શે છે.

(3) વર્તુળ $\bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0$, $\bar{r} \cdot (1, 5, -7) = 45$ ના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા મેળવો.

6. (a) R^3 માં બિંદુ (α, β, γ) માંથી પસાર થતી અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સર્જક રેખાઓ વાળા પરિસ્પર્શી શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) R^3 માં સુરેખા $\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$ જેનો અક્ષ હોય અને ત્રિજ્યા r હોય એવા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) શિરોબિંદુ (α, β, γ) અને આધારવક્ર $y^2 = 4ax$, $z = 0$ હોય એવા શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

(2) સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે, તેનાં શીર્ષ, અર્ધ શિરઃકોણ અને અક્ષ મેળવો.

(3) એક સમનળાકાર $(4, -5, 3)$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તેનો અક્ષ z-અક્ષને સમાંતર તથા બિંદુ $(5, -2, 6)$ માંથી પસાર થાય છે. આ સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

7. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો તેમજ સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

(a) પરવલયજ $ax^2 + by^2 = 2z$ નાં તેની પરનાં બિંદુ (α, β, γ) આગળના સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) એકપૃષ્ઠી અતિવલયજ $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ ના સમતલ $20x + 4y - 21z = 19$ ને સમાંતર સ્પર્શતલો ના સમીકરણો અને તેમના સ્પર્શબિંદુઓ મેળવો.

(2) ઉપવલયજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ નું સ્પર્શતલ યામાક્ષોને બિંદુ A, B, C માં છેદે છે તો સાબિત કરો કે Δ ABC ના મધ્યકેન્દ્રનો પથ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ છે.

(3) સાબિત કરો કે λ ની દરેક કિંમત માટે સમતલ

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2\right) = 1,$$

શાંકવજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ને સ્પર્શે છે.

Seat No. : ____________

FB-02

Mathematics Paper-II

(New Course)

Time : 3 Hours] **[Total Marks: 105**

Instructions : (1) There are seven questions.
(2) Attempt **all** questions.
(3) All questions carry equal marks.

1\. (a) Define adjoint of a matrix. If $A = [a_{ij}]_n$ is a square matrix of order n, prove that $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = |A|\,I_n$.

OR

(a) Define Transpose of a matrix.
If A is $m \times n$ matrix and B is $n \times p$ matrix then prove that
$(AB)^T = B^T A^T$.

(b) Define rank of a matrix.

Find the rank of a matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Attempt any **one** :

(1) Define symmetric and skew-symmetric matrices.

Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew-symmetric matrices.

(2) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, obtain A^{-1}.

2\. (a) Define eigen value and eigen vector of a square matrix. Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Obtain the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, and also find the matrix represented by the expression

$$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I.$$

(c) Using Crammer's rule, obtain the solution of the system of linear equations given by

$$5x + 3y + 7z = 4$$
$$3x + 26y + 2z = 9$$
$$7x + 2y + 11z = 5$$

OR

2. (a) State and prove Caley-Hamilton theorem.

(b) Discuss the consistency of the following system of linear equations, find its solution using row-reduction method.

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + 3z = 4$$
$$x + 4y + 9z = 6$$

(c) Using Caley-Hamilton theorem find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

3. (a) Explain Ferrari's method to solve a Bi-Quadratic equation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$
$$a, b, c, d, e \in R, \quad a \neq 0$$

OR

(a) Explain Cardon's method to solve cubic equation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$$
$$a, b, c, d \in R, \quad a \neq 0$$

(b) Attempt any **two** :

(1) Solve the equation $x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 104x + 96 = 0$ using Ferrari's method.

(2) Solve the equation $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$ using Cardon's method.

(3) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 - 12x + 16 = 0$ then obtain the equations whose roots are

(i) $(\alpha - \beta)^2, \; (\beta - \gamma)^2, \; (\gamma - \alpha)^2$ and

(ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \; \gamma(\alpha + \beta)$.

4. (a) In usual notations obtain the polar equation $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$ of a conic in R^2.

OR

(a) Obtain the polar equation of circle having centre at (δ, α) and radius 'a'. If circle passes through pole, then what is its equation ?

(b) Attempt any **two** :

(1) If P′SP and Q′SQ are mutually perpendicular focal chords of conic, then prove that $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{constant}$.

(2) Prove that the equation $r = a \cos\theta + b \sin\theta$ (a, b non-zero constants) represents a circle. Also find its centre and radius.

(3) Find Cartesian and spherical co-ordinates of a point whose cylindrical co-ordinates are $(4, \frac{\pi}{4}, 4)$.

5. (a) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3.

OR

(a) Prove that the intersection of sphere and plane is a circle.

(b) Attempt any **two** :

(1) For what value of 'a' the plane $x + y + z = a$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$? Obtain the point of contact.

(2) Prove that the spheres

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$$ touch each other externally.

(3) Find centre and radius of the circle

$$\bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0, \ \bar{r} \cdot (1, 5, -7) = 45.$$

6. (a) Obtain the equation of an enveloping cone having generator touching a sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and passing through a point (α, β, γ) in R^3.

OR

(a) Obtain the equation of right circular cylinder having axis $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ and radius r in R^3.

(b) Attempt any **two** :

(1) Obtain the equation of a cone having vertex at (α, β, γ) and guiding curves $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

(2) Prove that the equation $xy + yz + zx = 0$ represents a right circular cone and also find its axis, the vertex and the semi-vertical angle.

(3) If the axis of the right circular cylinder passing through $(4, -5, 3)$ is parallel to z–axis and passes through point $(5, -2, 6)$ then find the equation of right circular cylinder.

7. (a) Obtain the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and also find point of their contact.

OR

(a) Obtain the equation of the tangent plane at point (α, β, γ) to the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2z$.

(b) Attempt any **two** :

(1) Find the equation of the tangent plane and the point of contact to the hyperboloid $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ of one sheet parallel to the plane $20x + 4y - 21z = 19$.

(2) If the tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ meets the co-ordinate axes in A, B, C then prove that the locus of centroid of Δ ABC is $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$.

(3) Prove that for all values of λ, the plane

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2\right) = 1$$

touches the conicoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Seat No. : ____________

FB-02

Mathematics Paper-II

(Old Course)

Time : 3 Hours] **[Total Marks : 105**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **સાત** પ્રશ્નો છે.

(2) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(3) દરેક પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (a) સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો.

જો $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2) \in R^2$ હોય તથા $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ અને $\alpha\,\overline{x} = (\alpha x_2, 0)$ $\alpha \in R$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો R^2 વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

અથવા

(a) સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. જો A અને B એ સદિશ અવકાશ V ના બે ઉપાવકાશો હોય તો સાબિત કરો કે A + B પણ V નું ઉપાવકાશ છે.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) સાબિત કરો કે $A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ એ R^3 નું ઉપાવકાશ છે.

(2) R^3 ના ઉપાવકાશ SP $\{(1, 2, 1), (-1, 3, 2), (4, 5, -3)\}$ માં સદિશો (2, 1, 1) અને (1, 1, 2) આવેલાં છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

(3) જો A એ સદિશ અવકાશ V નો અરિકત ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે

(i) $[A] = A \Leftrightarrow A$ એ V નું ઉપાવકાશ છે.

(ii) $[[A]] = [A]$.

2. (a) R^n ના સદિશોની સુરેખ સ્વાયત્તતા અને સુરેખ અવલંબનની વ્યાખ્યા આપો.

સાબિત કરો કે સુરેખ સ્વાયત્ત ગણનો દરેક ઉપગણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

અથવા

(a) સાન્ત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ V ના કોઈપણ સુરેખ સ્વાયત્ત ગણને V નાં આધાર સુધી વિસ્તૃત કરી શકાય છે તેમ બતાવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) R^2 ના આધાર {(3, 4), (4, 3)} ને સાપેક્ષ સદિશ (25, 25) ના યામ મેળવો.

(2) જો R^3 ના ત્રણ સદિશો $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ સુરેખ સ્વાયત્ત હોય તો બતાવો કે $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{y} + \bar{z}$, $\bar{z} + \bar{x}$ પણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

(3) ગણ {(1, 0, 1)} ને R^3 ના બે ભિન્ન આધાર સુધી લંબાવો.

3. (a) સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો.

સાબિત કરો કે જો $T : U \to V$ સુરેખ પરિવર્તન હોય

$$\Leftrightarrow T(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y})$$

$$\forall x, y \in U, \quad \alpha, \beta \in R.$$

અથવા

(a) ધારો કે $T : U \to V$ સુરેખ પરિવર્તન છે. સાબિત કરો કે T એક-એક હોય તો અને તો જ $N(T) = \{\theta_U\}$.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) સાબિત કરો કે $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ સુરેખ પરિવર્તન છે તેમજ N(T) અને R(T) શોધો.

(2) સાબિત કરો કે સુરેખ પરિવર્તન $T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$ વ્યસ્ત સંપન્ન છે અને T^{-1} મેળવો.

(3) સુરેખ પરિવર્તન $T : R^2 \to R^3$, $T(1, 1) = (2, 0, 1)$ અને $T(2, -1) = (1, -1, 1)$ હોય તો $T(x, y)$ મેળવો તેમજ $T(2, 3)$ શોધો.

4. (a) સુરેખ પરિવર્તન સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

જો $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ $\theta \in R$ આપેલ સુરેખ પરિવર્તન હોય અને $B_1 = B_2 = \{e_1, e_2\}$ અને R^2 ના આધાર હોય તો શ્રેણિક $[T : B_1, B_2]$ મેળવો.

અથવા

(a) પ્રચલિત સંકેતમાં શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ સ્વરૂપે મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) સુરેખ પરિવર્તન $T : R^2 \to R^3$ મેળવો કે જેથી $A = [T : B_1, B_2]$ થાય જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ તેમજ $B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ એ અનુક્રમે R^2 અને R^3 માં ક્રમિત આધારો છે.

(2) સમીકરણ $15 - 3r = r\cos\theta$ કયા પ્રકારનો શાંકવ દર્શાવે છે ? તેના નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો તેમજ તેનું કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

(3) ધ્રુવીય યામ પધ્ધતિમાં $(2, \pi/6)$ અને $(\sqrt{3}, \pi/3)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી સુરેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ શોધો. તેના પર ધ્રુવમાંથી દોરેલાં લંબની લંબાઈ શોધો.

5. (a) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરનાં બિંદુ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) સાબિત કરો કે માં R^3 સમતલ અને ગોલકનો સામાન્ય છેદ એક વર્તુળ છે.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) 'a' ની કઈ કિંમત માટે સમતલ $x + y + z = a$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$ ને સ્પર્શે ? કયા બિંદુઓ સ્પર્શબિંદુઓ થાય ?

(2) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$ બહારથી સ્પર્શે છે.

(3) વર્તુળ $\bar{r}^2 - 2\,\bar{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0,\ \bar{r} \cdot (1, 5, -7) = 45$ ના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

6. (a) R^3 માં બિંદુ (α, β, γ) માંથી પસાર થતી અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સર્જક રેખાઓવાળા પરિસ્પર્શી શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) R^3 માં સુરેખા $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ જેનો અક્ષ હોય અને ત્રિજ્યા r હોય એવા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) શિરોબિંદુ (α, β, γ) અને આધારવક્ર $y^2 = 4ax$, $z = 0$ હોય એવા શંકુનું સમીકરણ શોધો.

(2) સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે તેના શીર્ષ, અર્ધ શિર:કોણ અને અક્ષ મેળવો.

(3) એક સમનળાકાર $(4, -5, 3)$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તેનો અક્ષ z-અક્ષ ને સમાંતર તથા $(5, -2, 6)$ માંથી પસાર થાય છે. આ સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

7. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો તેમજ સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

(a) પરવલયજ $ax^2 + by^2 = 2z$ ના તેની પરના બિંદુ (α, β, γ) આગળના સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો :

(1) એકપૃષ્ઠી અતિવલયજ $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ ના સમતલ $20x + 4y - 21z = 19$ ને સમાંતર સ્પર્શતલોના સમીકરણો અને તેમના સ્પર્શબિંદુઓ મેળવો.

(2) ઉપવલયજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ નું સ્પર્શતલ યામાક્ષોને બિંદુ A, B, C માં છેદે છે તો સાબિત કરો કે Δ ABC ના મધ્યકેન્દ્રનો પથ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ છે.

(3) સાબિત કરો કે λ ની દરેક કિંમત માટે સમતલ

$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2\right) = 1$, શાંકવજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ને સ્પર્શે છે

Seat No. : ____________

FB-02

Mathematics Paper-II

(Old Course)

Time : 3 Hours] **[Total Marks : 105**

Instructions : (1) There are seven questions in this question paper.

(2) Attempt **all** questions.

(3) All questions carry equal marks.

1. (a) Define vector space.

If $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in R^2$ and $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ and

$\alpha \bar{x} = (\alpha x_2, 0)$ $\alpha \in R$ are defined in R^2, is R^2 a vector space ? Justify your answer.

OR

(a) Define subspace of the vector space. If A and B are two subspaces of vector space V then prove that A + B is also subspace of V.

(b) Attempt any **two** :

(1) Prove that $A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ is a subspace of R^3.

(2) Determine whether the vectors (2, 1, 1) and (1, 1, 2) belongs to the subspace SP {(1, 2, 1), (–1, 3, 2), (4, 5, –3)} of R^3 or not.

(3) If A is a non-empty subset of a vector space V then prove that

(i) $[A] = A \Leftrightarrow$ A is a subspace of V

(ii) $[[A]] = [A]$

2. (a) Define linear independence and linear dependence of vector of R^n.

Prove that every subset of a linearly independent set is linearly independent.

OR

(a) Every linearly independent subset of a finite dimensional vector space V can be extended up to a basis of V.

(b) Attempt any **two** :

(1) Obtain co-ordinates of the vector (25, 25) of the vector space R^2 with respect to the basis {(3, 4), (4, 3)}.

(2) If $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ are three linearly independent vectors of R^3, prove that $\overline{x} + \overline{y}$, $\overline{y} + \overline{z}$, $\overline{z} + \overline{x}$ are also linearly independent vectors.

(3) Extend the set {(1, 0, 1)} to two different bases of vector space R^3.

3. (a) Define linear transformation. Prove that if $T : U \to V$ is linear transformation

$$\Leftrightarrow T(\alpha \overline{x} + \beta \overline{y}) = \alpha T(\overline{x}) + \beta T(\overline{y}).$$

$$\forall x, y \in U, \quad \alpha, \beta \in R.$$

OR

(a) $T : U \to V$ is linear transformation. Prove that T is one-one if and only if $N(T) = \{\theta_U\}$.

(b) Attempt any **two** :

(1) Prove that $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ is linear transformation. Also find N(T) and R(T).

(2) Prove that the linear transformation
$T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$ is non-singular.
Also find T^{-1}.

(3) For linear transformation $T : R^2 \to R^3$, $T(1, 1) = (2, 0, 1)$ and $T(2, -1) = (1, -1, 1)$, then find $T(x, y)$. Also find $T(2, 3)$.

4. (a) Define matrix associated with a linear transformation.

If $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ $\theta \in R$ is linear transformation and $B_1 = B_2 = \{e_1, e_2\}$ are bases in R^2 then find $[T : B_1, B_2]$.

OR

(a) In usual notations obtain the polar equation of a conic in R^2 as $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$.

(b) Attempt any **two** :

(1) Obtain the linear transformation $T : R^2 \to R^3$ so that $A = [T : B_1, B_2]$

where $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ and $B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ and

$B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ are ordered basis of R^2 and R^3 respectively.

(2) Which conic is represented by the equation $15 - 3r = r \cos \theta$? Obtain length of latusrectum & its Cartesian equation.

(3) Find the polar equation of the straight line passing through $(2, \pi/6)$ and $(\sqrt{3}, \pi/3)$. Find the length of perpendicular drawn from the pole upon it.

5. (a) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3.

OR

(a) Prove that the intersection of sphere and plane is a circle.

(b) Attempt any **two** :

(1) For what value of 'a' the plane $x + y + z = a$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$? Obtain the point of contact.

(2) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$ touch each other externally.

(3) Find centre and radius of the circle

$\bar{r}^2 - 2\,\bar{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0, \ \bar{r} \cdot (1, 5, -7) = 45.$

6. (a) Obtain the equation of an enveloping cone having generator touching a sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and passing through a point (α, β, γ) in R^3.

OR

(a) Obtain the equation of right circular cylinder having axis

$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$ and radius r in R^3.

(b) Attempt any **two** :

(1) Obtain the equation of a cone having vertex at (α, β, γ) and guiding curves $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

(2) Prove that the equation $xy + yz + zx = 0$ represents a right circular cone and also find its axis, the vertex and the semivertical angle.

(3) If the axis of the right circular cylinder passing through (4, –5, 3) is parallel to z-axis and passes through point (5, –2, 6) then find the equation of right circular cylinder.

7. (a) Obtain the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and also find point of contact.

OR

(a) Obtain the equation of the tangent plane at point (α, β, γ) to the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2z$.

(b) Attempt any **two** :

(1) Find the equation of the tangent plane and the point of contact to the hyperboloid $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ of one sheet parallel to the plane $20x + 4y - 21z = 139$.

(2) If the tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ meets the co-ordinate axes in A, B, C then prove that the locus of centroid of Δ ABC is $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$.

(3) Prove that for all values of λ, the plane

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2\right) = 1$$ touches the conicoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$