(7 pages)

6252/M32

OCTOBER 2007

Paper VII — LINEAR ALGEBRA AND NUMBER SYSTEM

(For those who joined in July 2003 and after)

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — ($8 \times 5 = 40$ marks)

Answer any EIGHT questions.

1. V என்பது F என்ற களத்தின் மீதான வெக்டர் வெளியானால், கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(அ) $\alpha \cdot 0 = 0$ $(\alpha \in F, 0 \in V)$

(ஆ) $0 \cdot v = 0$ $(v \in V, 0 \in F)$

(இ) $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$ $(\alpha \in F, v \in V)$.

Let V be a vectorspace over a field F. Then prove the following :

(a) $\alpha \cdot 0 = 0$ $(\alpha \in F, 0 \in V)$

(b) $0 \cdot v = 0$ $(v \in V, 0 \in F)$

(c) $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$ $(\alpha \in F, v \in V)$.

2. $T : V \to W$ என்பது ஒரு ஒருபடி உருமாற்றம் எனில் $T(V) = \{T(v) / v \in V\}$ என்ற கணம் W -ன் உள்வெளி என நிறுவுக.

Let $T : V \to W$ be a linear transformation. Then prove that the set $T(V) = \{T(v) / v \in V\}$ is a subspace of W.

3. A, B என்பன சமவரிசையுள்ள இரு செங்குத்து அணிகள் ஆனால், A^T செங்குத்தணி எனவும் AB ஒரு செங்குத்தணி எனவும் நிறுவுக.

Let A and B be orthogonal matrices of the same order. Then prove that A^T is orthogonal and AB is orthogonal.

4. வரிசை n உடைய ஒரு சதுர அணி A எனில் $(adj A)A = A(adj A) = |A| I$, என நிறுவுக. I என்பது வரிசை n உடைய ஒரு அலகு அணி.

Let A be any square matrix of order n. Prove that $(adj A)A = A(adj A) = |A| I$, where I is the unit matrix of order n.

5. உள் பெருக்கு வெளியை வரையறுக்க. V என்பது F -ன் மீதான ஓர் உள்பெருக்கு வெளி எனில்

(அ) $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u,v)$ $\alpha \in F, u,v \in V$

(ஆ) $(u, v+w) = (u,v) + (u,w)$, $u,v,w \in V$ என நிறுவுக.

Define inner product space. If V is an inner product space over F, prove that

(a) $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u,v)$, $\alpha \in F, u,v \in V$

(b) $(u, v+w) = (u,v) + (u,w)$, where $u,v,w \in V$.

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டைக் காண்க.

Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை, செங்குத்து அமைப்பிற்குக் குறைத்து அதன் தரம் காண்க.

Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ to normal form and find its rank.

8. N என்ற எண்ணின், வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

Find the numbers of divisors of a given number N.

9. $n(n+1)(2n+1)$ என்ற எண், 6 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

Show that $n(n+1)(2n+1)$ is divisible by 6.

10. $2^{1000} \equiv 3 (\text{mod}\, 13)$ என நிறுவுக.

Prove that $2^{1000} \equiv 3 (\text{mod}\, 13)$.

[P.T.O.]

11. ஒரு முழு எண்ணின் வர்க்கம் $3m$ அல்லது $3m+1$ என்ற வடிவில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Show that every square is of the form $3m$ or $3m+1$.

12. $712!+1$ என்ற எண் 719-ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

Show that $712!+1$ is divisible by 719.

SECTION B — $(6 \times 10 = 60$ marks$)$

Answer any SIX questions.

13. ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியின் ஏதேனும் இரண்டு அடிக்கணங்கள் சம எண்ணிக்கையுள்ள வெக்டர்களைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that any two bases of a finite dimensional vector space have the same number of vectors.

14. களம் F-ன் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி V-ன் உள்வெளி W எனில், $\dfrac{V}{W} = \{W + V / v \in V\}$ ஆனது F-ன் மீது ஒரு வெக்டர் வெளி என நிறுவுக.

If W is a subspace of a vector space V over the field F, prove that $\dfrac{V}{W} = \{W + V / v \in V\}$ is a vector space over F.

15. எந்த ஒரு சதுர அணியையும், ஒரு சமச்சீர் அணி மற்றும் ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணி ஆகியவற்றின் கூடுதலாக ஒரே ஒரு வழியில் எழுத முடியும் என நிறுவுக.

Prove that any square matrix is expressible uniquely as a sum of a symmetric matrix and a skew symmetric matrix.

16. ஒவ்வொரு முடிவுள்ள பரிமாணமுள்ள உள்பெருக்கு வெளியும், செங்குத்து அலகு அடியைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

17. கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cayley Hamilton theorem.

18. ஒவ்வொரு கூட்டு எண்ணையும், பகா எண்களின் பெருக்கலாக ஒரே ஒரு வழியில் எழுத முடியும் என நிறுவுக.

Prove that every composite number can be written as a product of prime numbers in a unique way.

19. n ஒரு முழு எண் எனில், $\varphi(N)$-ன் மதிப்பு காண்க.

If n is an integer, find the value of $\varphi(N)$.

20. (அ) $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ என்ற எண், 14 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

(ஆ) x, y, z என்பன மூன்று அடுத்தடுத்த முழு எண்கள் எனில், $\left(\sum x\right)^3 - 3\sum x^3$ என்பது 108 ஆல் வகுபடும் எனக் காண்க.

(a) Prove that $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ is divisible by 14.

(b) If x, y, z are three consecutive integers show that $\left(\sum x\right)^3 - 3\sum x^3$ is divisible by 108.

21. லெக்ராஞ்சியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக. வில்சன் தேற்றத்தைத் தருவிக்க.

State and prove Lagrange's theorem. Deduce Wilson's theorem.

22. $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 14$, $x + 4y + 7z = 30$ எனும் சமன்பாடுகள் பொருந்தும் எனக் காட்டி தீர்வுகளைக் காண்க.

Show that the equations $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 14$, $x + 4y + 7z = 30$ are consistent and solve them.